LXXVII Московская астрономическая олимпиада (2023 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

7 класс

Задача 1

Полное центральное солнечное затмение наблюдали в Калининграде, Петропавловске-Камчатском и Ташкенте. В каком городе продолжительность полной фазы затмения была больше и почему? В каком порядке наступала полная фаза затмения в этих городах? В какое время суток?

Решение. Между этими городами очень большое расстояние, при этом Солнце освещает одновременно все три города. Значит, Калининград и Петропавловск-Камчатский находятся примерно на краях полосы затмения, а Ташкент, который находится посередине между ними, — в середине полосы.

Полоса затмения — это путь тени Луны по поверхности Земли. Поскольку Луна движется среди звёзд с запада на восток, то и тень движется в том же направлении, поэтому затмение наступит последовательно в Калининграде, затем в Ташкенте и, в самом конце, в Петропавловске-Камчатском.

Очевидно, что долготы Петропавловска-Камчатского и Калининграда отличаются меньше, чем на 180°. В день затмения Солнце на Камчатке встало раньше, потом началось утро в Ташкенте, а к моменту, когда взошло Солнце в Калининграде, в Петропавловске уже наступил вечер. Очевидно, что в момент затмения в Ташкенте уже давно был день.

На продолжительность затмения будут влиять два фактора. Во-первых, Земля вращается вокруг своей оси в том же направлении, что и Луна обращается вокруг Земли. В момент затмения Калининград за счёт суточного вращения движется преимущественно к Солнцу, а Петропавловск-Камчатский — от него. Движение Ташкента направлено примерно в том же направлении, что движение тени. Поэтому относительная скорость Ташкента и тени меньше, а продолжительность затмения больше.

Во-вторых, в момент затмения Ташкент оказывается чуть-чуть ближе к Луне (и Солнцу), меньше чем на радиус Земли, но всё равно ближе. Из-за этого угловой размер Луны становится чуть больше, а значит, она дольше будет закрывать Солнце. Угловой размер Солнца тоже изменяется, но из-за того, что Солнце в 400 раз дальше Луны, эффект во столько же раз меньше.

Оба эффекта действуют одинаково, а значит, в Ташкенте полная фаза длилась дольше.

Критерии проверки

1. Правильный порядок наступления затмения с обоснованием **2 балла**

   Без обоснования — 1 балл.
2. Определение времени суток в каждом городе **3 балла**
3. Описание факторов, влияющих на продолжительность затмения **по 1 баллу**
4. Правильный вывод о городе с максимальной продолжительностью затмения **1 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Известно, что один атом нейтрального водорода в межзвёздных облаках излучает на длине волны 21 см в среднем 1 раз за 11 млн. лет. Определите, насколько много таких фотонов излучается за 1 секунду в нашей Галактике, если масса межзвёздного газа составляет 2% от массы Галактики.

Решение. На первом этапе задачи определим, как много атомов нейтрального водорода содержится в межзвёздном газе:

$$N = \frac{M_{\text{межзвёздный газ}}}{m_H},$$

где m_H — это масса одного атома водорода или, что практически то же самое, масса протона. Масса межзвёздного газа составляет 2% от массы Галактики. Её можно взять в справочных данных $M_{MW} = 2 \times 10^{12}\ M_\odot$, где $M_\odot$ — это масса Солнца. Там же в справочных данных $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ кг.

Подставляя все записанные величины:

$$N = \frac{2\% M_{MW}}{m_H} = \frac{2\% \times 2 \times 10^{12} M_\odot \times 2 \times 10^{30}\,\text{кг}}{1.67 \times 10^{-27}\,\text{кг}} = 4.8 \times 10^{67}\ \text{атомов водорода.}$$

Каждый атом излучает фотон с длиной волны 21 см крайне редко — 1 раз за 11 миллионов лет.

$$\Delta t = 1.1 \times 10^7\,\text{лет} = 1.1 \times 10^7 \times 365.25 \times 24 \times 3600\,\text{с} = 3.47 \times 10^{14}\,\text{с}.$$

Но, поскольку атомов нейтрального водорода в межзвёздном газе очень много, то в единицу времени (в одну секунду) излучается

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4.8 \times 10^{67}}{3.47 \times 10^{14}} = 1.38 \times 10^{53}\,\text{фотонов в секунду.}$$

Критерии проверки

1. Нахождение в справочных данных массы галактики и Солнца	**2 балла**
2. Определение числа атомов водорода	**3 балла**
3. Определение времени между излучениями фотона в секундах	**1 балл**
4. Получение итогового ответа	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 3

Вокруг далёкой звезды вращается планета — горячий нептун. Под действием излучения звезды планета непрерывно теряет атмосферу со скоростью $\dot{M} = 2 \times 10^8$ кг/с. Вспышки в атмосфере звезды сопровождаются корональными выбросами массы, каждый из которых приводит к дополнительной потере вещества планетой $\Delta M = 10^{-10} M$, где $M = 1.37 \times 10^{26}$ кг. Вспышки бывают трёх типов, приводящих к потере массы планетой со скоростью $225\dot{M}$, $70\dot{M}$ и $44\dot{M}$. Определите продолжительность каждого типа вспышек. Через какое время планета полностью потеряет всю атмосферу, если атмосфера составляет 16% массы планеты, а вспышки происходят каскадом из всех трёх типов: 2 сильных, 3 средних и 4 слабых? Считать, что между каскадами проходит 11 лет, а между вспышками в каскаде — 20 дней.

Решение. Найдём вначале продолжительность каждой вспышки:

$$t = \frac{\Delta M}{\dot{M}_{\text{вспышки}}} = \frac{10^{-10} M}{k\dot{M}} = \frac{1}{k} 792.8 \text{сут.}$$

Здесь k равно 225 для сильных вспышек, 70 для средних и 44 для слабых. Подставляя эти значения, получаем $t_{\text{сильной}} = 3.52$ сут; $t_{\text{средней}} = 11.33$ сут; $t_{\text{слабой}} = 18.02$ сут.

Продолжительность каскада вспышек составляет

$$t_{\text{кас}} = 2 \times t_{\text{сильной}} + 3 \times t_{\text{средней}} + 4 \times t_{\text{слабой}} + 8 \times 20\,\text{сут} = 273.11\,\text{сут}.$$

Найдём дополнительную потерю массы в каскаде:

$$\Delta M_{\text{кас}} = 2 \times \Delta M + 3 \times \Delta M + 4 \times \Delta M = 9 \times \Delta M = 9 \times 10^{-10} M.$$

Найдём потерю атмосферы за период между двумя началами каскадов:

$$\overline{M} = (11\,\text{лет} + t_{\text{кас}}) \times \dot{M} + \Delta M_{\text{кас}} = 1.97 \times 10^{17}\,\text{кг}.$$

Масса атмосферы планеты составляет $m = 0.16 \times M = 2.192 \times 10^{25}$ кг. Тогда время полной потери атмосферы:

$$t = \frac{m}{\overline{M}} \times (11\,\text{лет} + t_{\text{кас}}) = 1.31 \times 10^9\,\text{лет}.$$

Критерии проверки

1. Найдена продолжительность каждой вспышки **2 балла**
   (1 за формулу, 1 за расчёт всех трёх продолжительностей)
2. Найдена масса атмосферы **1 балл**
3. Найдена продолжительность каскада **1 балл**
4. Найдена дополнительная потеря массы в каскаде **1 балл**
5. Найдена потеря атмосферы за период между двумя началами каскадов (может быть объединено с пунктом 4 в решении) **2 балла**
6. Найдено время полной потери атмосферы (и значение, и формула есть) **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. А. Автаева)

Задача 4

Древние греки пользовались календарём, в котором все месяцы начинались новолунием и длились 29 или 30 дней, а средняя продолжительность календарного года была равна продолжительности тропического года. Для этого N раз за восемь лет вставляли дополнительный месяц. В то же время в Персии использовался подобный календарь, в котором вставляли M дополнительных месяцев за 19 лет. Определите M и N. За какое время в каждом из календарей накапливалась ошибка в 7 дней по сравнению с тропическим годом?

Решение. Для ответа на первый вопрос задачи достаточно приближённых вычислений. Длина тропического года, 365.242 19, примерно на 11 дней и 6 часов больше длины 12 лунных месяцев ($12\times 29.5 = 354$ сут). За 8 лет эта разница вырастает до примерно 90 дней. Тогда $N = 90/30 = 3$. За 19 лет тропический год опережает лунный примерно на 214 суток, что составляет $M = 7$ дополнительных месяцев.

Теперь определим погрешности календарей. Из того, что месяцы должны начинаться новолунием, следует невозможность простого чередования длины месяца 29 или 30 дней. Ведь тогда средняя длина календарного месяца немного короче, чем лунного, и начало месяца рано или поздно перестанет попадать на новолуние. Единственный выход — это более сложное чередование коротких и длинных месяцев так, чтобы средняя продолжительность месяца была как можно ближе к лунному. Поэтому будем просто считать среднюю продолжительность календарного месяца равной 29.53059 суток.

Восемь тропических лет состоят из 2921.938 дней, в то время как $8 \times 12 + 3 = 99$ месяцев — из $99 \times 29.53059 = 2923.528$ суток. Отсюда получаем что за 8 лет греческий календарь опережает тропический год на 1.59 суток, откуда следует, что на 7 суток календарь «убежит» за 35.2 года.

Аналогично, 19 лет содержат 6939.6018 дня, тогда как $19 \times 12 + 7 = 235$ месяцев — 6939.6887 суток. За 19 лет разница составляет всего 0.0869 суток или чуть более 2 часов. Отсюда получаем, что 7 суток разницы набегает за $19 \times 7/0.0869 \approx 1530$ лет.

Как мы видим, персидский календарь гораздо точнее греческой «октаэтериды». Позже греки тоже пытались использовать 19-летний цикл, который в науке остался известен как метонов.

Критерии проверки

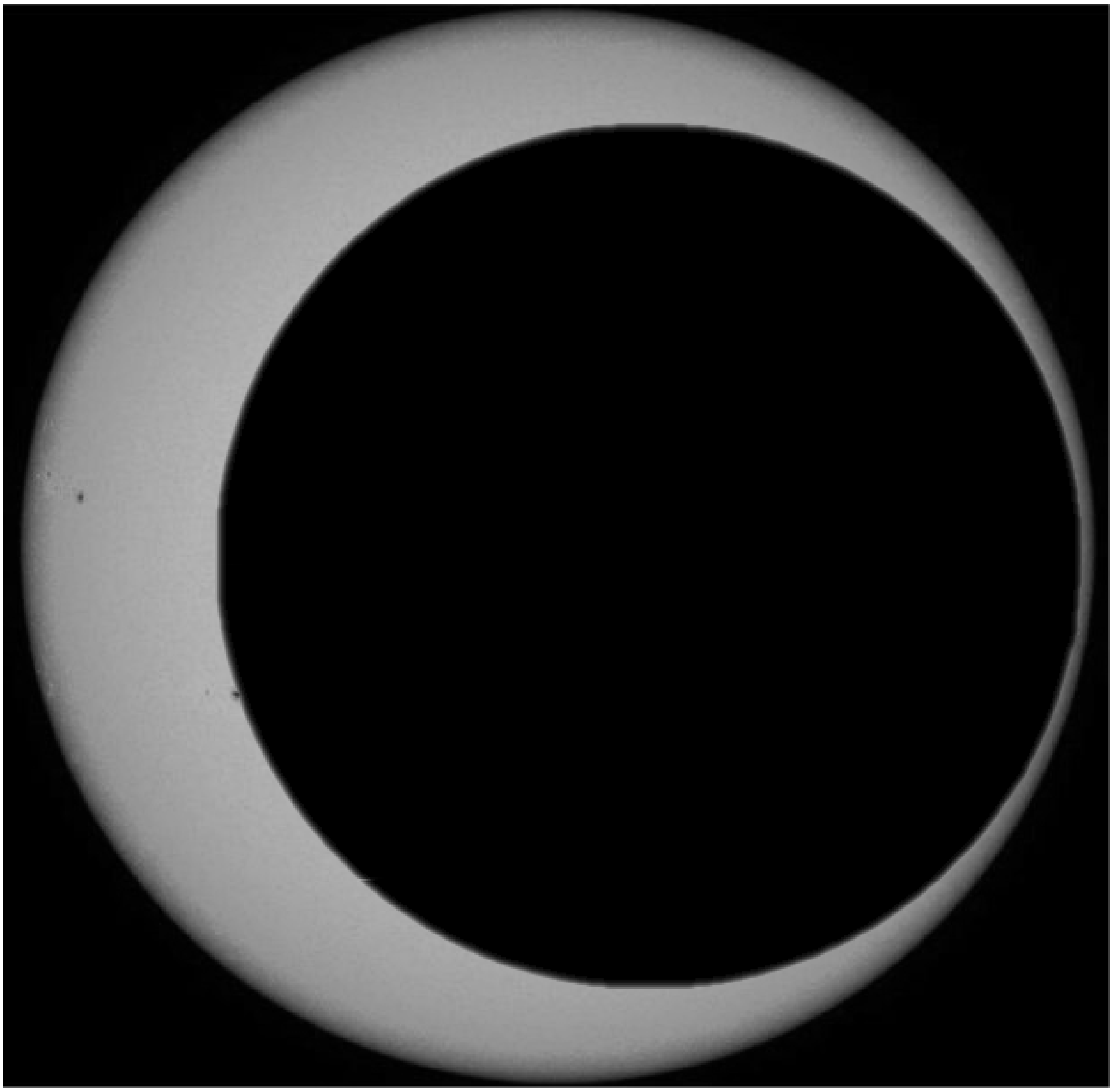
1. Определение правильных значений N и M **по 2 балла**
2. Определение времени накопления ошибки **по 2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

На рисунке показано затмение Солнца, которое когда-нибудь смогут наблюдать наши далёкие-далёкие потомки. Через сколько лет это произойдёт, если Луна удаляется от Земли с постоянной скоростью 3 см/год? Как долго будет длиться затмение (все фазы в сумме), если скорость движения Луны по орбите станет равна 930 м/с? Как часто будут происходить затмения? Считайте, что орбита Луны со временем станет круговой и лежащей в плоскости эклиптики, а радиус Солнца останется неизменным.



Решение. С помощью линейки определим относительные видимые размеры Луны и Солнца на рисунке. Получим, что диск Солнца в 1.25 раза больше диска Луны. Можно вспомнить, что угловой размер Солнца равен примерно $\delta_\odot \approx 32'$ или вычислить его из имеющихся данных:

$$\delta_\odot \approx \frac{2R_\odot}{a_\oplus} \approx 9.3 \times 10^{-3}\,\text{рад} \approx 32'.$$

Тогда угловой размер Луны $\delta_☾ = 32'/1.25 = 25.6'$. Теперь можно вычислить расстояние до Луны:

$$\bar{a}_{☾} = \frac{2R_{☾}}{\delta_{☾}} = 1.25 a_{\oplus}\frac{R_{☾}}{R_{\odot}} \approx 4.7\times10^5\,\text{км}.$$

Найдём время, за которое Луна отодвинется на такое расстояние со скоростью v:

$$t = \frac{\bar{a}_{☾} - a_{☾}}{v} = \frac{(4.7\times10^5 - 3.8\times10^5)\,\text{км}}{3\times10^{-5}\,\text{км/год}} \approx 2.7\times10^9\,\text{лет}.$$

Если Луна будет двигаться по эклиптике, то время между затмениями будет равно периоду обращения Луны относительно Солнца (синодический период). Орбитальный (сидерический) период Луны равен

$$T = \frac{2\pi\bar{a}_{☾}}{V} \approx 36.8\,\text{сут}.$$

Само Солнце совершает один оборот по небу за год. Тогда синодический период Луны равен

$$S = \frac{365.25\times36.8}{365.25-36.8} = 41\,\text{сут}.$$

От начала до конца затмения Луна проходит угловое расстояние равное $\delta_{\odot} + \delta_{☾}$ относительно Солнца. Тогда продолжительность затмения равна

$$\tau = 41\,\text{сут}\times\frac{32' + 25.6'}{360^\circ} \approx 0.11\,\text{сут} \approx 2.6\,\text{часа}.$$

Критерии проверки

1. Верное вычисление расстояние до Луны любым способом с ответом в диапазоне 465–500 тыс. км **3 балла**

Из них 1 балл ставится за вычисление углового размера Солнца с величиной 31-32$'$ (или использование известного углового размера из диапазона 30-32$'$). За ответ меньше 384 тыс. км ставится 0 баллов за задачу (чем бы ни была вызвана ошибка).

2. Верное вычисление времени, через которое сможет наблюдаться затмение, изображённое на рисунке с ответом в диапазоне $(2.6 \div 3.9)\times10^9$ лет **2 балла**
3. Верное вычисление орбитального периода вращения Луны ($36 \div 39.5$ сут) **2 балла**
4. Верное вычисление синодического периода вращения Луны ($40 \div 44.3$ сут) **2 балла**
5. Верное вычисление длительности всего затмения ($2.5 \div 2.7$ сут) **3 балла**

Если вместо диаметров использованы радиусы тел, то ставится 1 балл.

Если вместо синодического периода использован сидерический, то ставится 1 балл.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(А. М. Татарников)